

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Κεφ.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΕΤΟΣ

Κ1/01

Να αποδείξετε ότι:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

Απόδειξη

Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και C, C' οι γραφικές παραστάσεις των f και της f^{-1} αντίστοιχα στο ίδιο σύστημα αξόνων όπως στο σχήμα

Επειδή

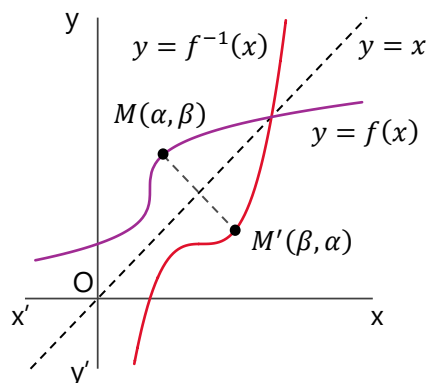
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε

$$(\alpha, \beta) \in C_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha \Leftrightarrow (\beta, \alpha) \in C_{f^{-1}}$$

Επομένως το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμος 1ης - 3ης γωνίας των αξόνων). ■



Κ1/02

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_0) \\ &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 \\ &= P(x_0) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \blacksquare$$

Κ1/03

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \blacksquare$$

Κ1/04

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

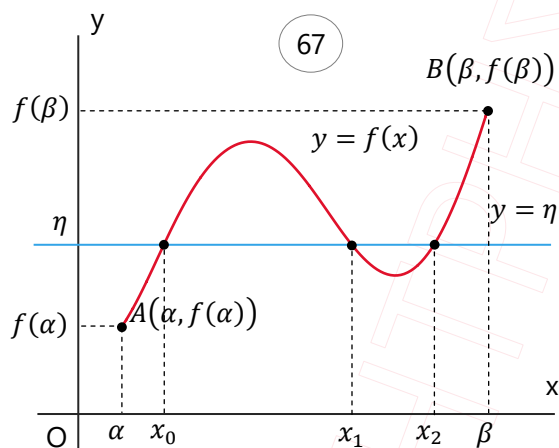
να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας,

τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$

[2024
2020,
2015,
2005]

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67).



Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$

αφού

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0 \quad \text{και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$ ■

Κ2/01

ΘΕΩΡΗΜΑ

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

[2022r,
2018,
2013r,
2007r,
2003,
2000]

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

Κ2/02

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

δηλαδή

$$(c)' = 0. \quad \blacksquare$$

Κ2/03

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$(x)' = 1$$

[2024r]

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

δηλαδή

$$(x)' = 1. \quad \blacksquare$$

Κ2/04

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή

$$(x^v)' = vx^{v-1}$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} \\ &= x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) \\ &= x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} \\ &= v x_0^{v-1} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(x^v)' = vx^{v-1}. \quad \blacksquare$$

Κ2/05

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[2009r,
2005r]

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Όπως είδαμε στην §3.1 η $f(x) = \sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.** ■

Κ2/06

ΘΕΩΡΗΜΑ-Παράγωγος αθροίσματος[2023,
2020r,
2020*]

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \blacksquare$$

Κ2/07

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1} \quad \blacksquare$$

Κ2/08

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \blacksquare$$

Κ2/09

Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Απόδειξη

Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \blacksquare$$

ΣΧΟΛΙΟ: Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

Κ2/10

Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Απόδειξη

Αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a \quad \blacksquare$$

Κ2/11

Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

[2008]

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη

Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

Αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \blacksquare$$

Ή αφού $\sqrt{x}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ η $|x| = \sqrt{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, έτσι:

$$(\ln|x|)' = \left(\ln(\sqrt{x^2}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot (\sqrt{x^2})' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|^2} = \frac{1}{x}$$

Κ2/12

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

[2021r,
2014,
2009,
2004r]**Απόδειξη**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι,

Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

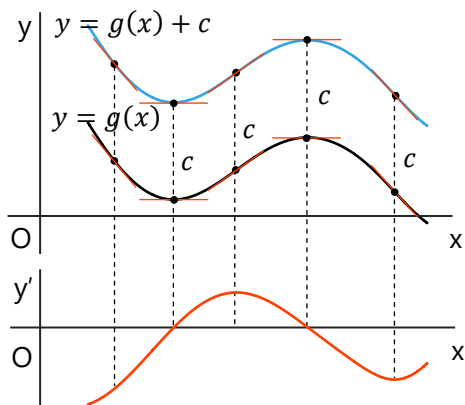
Κ2/13

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ .

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει,

$$f(x) - g(x) = c, \text{ οπότε } f(x) = g(x) + c. \blacksquare$$

Κ2/14

Θεώρημα (μονοτονίας)

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι

- αν $f'(x) > 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

[2023r
2021,
2019,
2017,
2012,
2006*,
2000r]

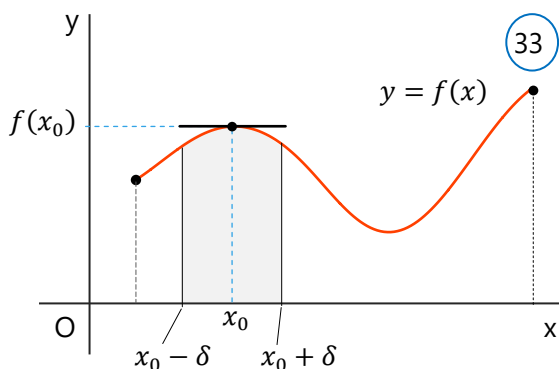
Κ2/15

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0$$

[2017re,
2016re,
2011,
2004]

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (2) \end{aligned}$$

Επομένως,

αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(1)}{\geq} 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(1)}{\leq} 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε

$$f'(x_0) = 0$$

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

Κ2/17

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακρότατα - μονοτονία)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , **με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0** , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α) [2020*r, 2019r, 2016, 2012r, 2018r, 1014r]
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σχ. 35γ). [2018r, 2014r]

Απόδειξη

- Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

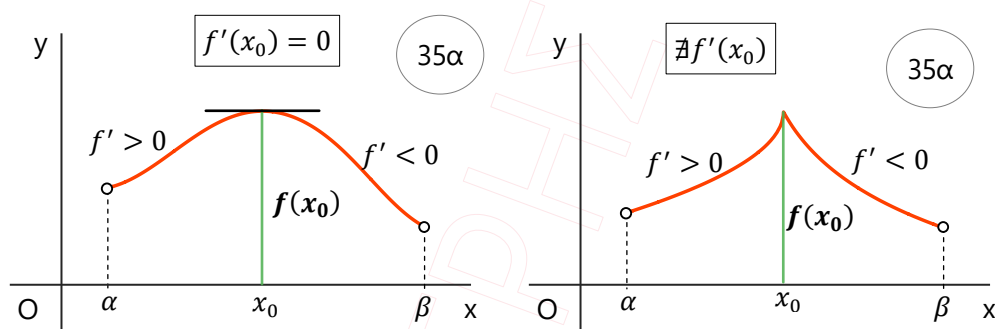
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

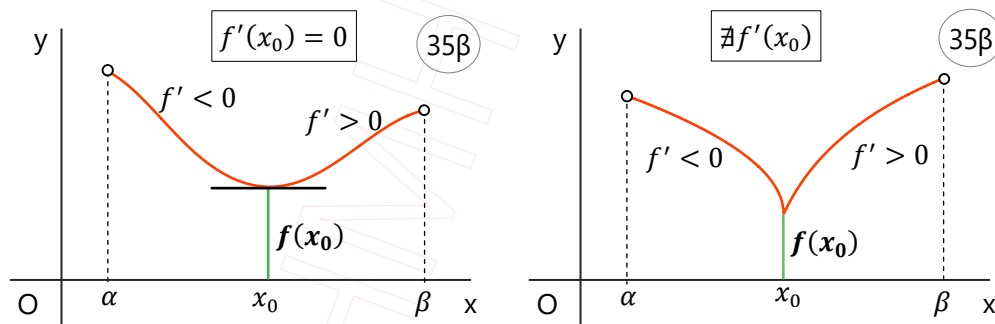
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.



- Εργαζόμαστε αναλόγως.



Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

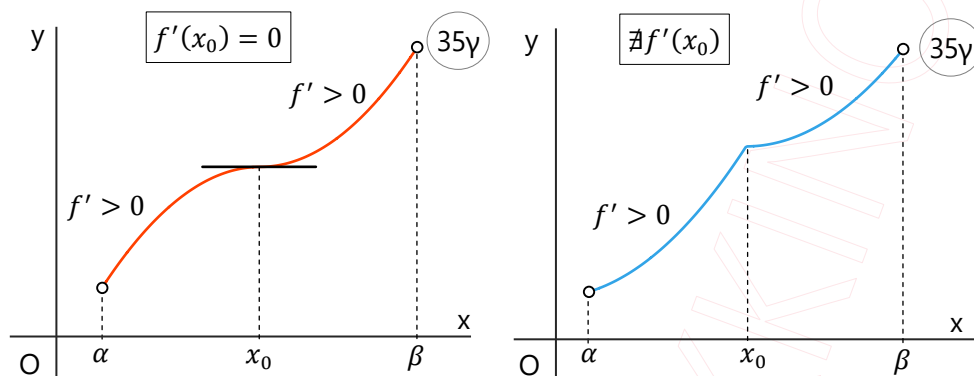
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

iii) Έστω ότι

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ **δεν είναι τοπικό ακρότατο** της f .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

Κ3/01

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της §2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$. ■

[2022, 2015r, 2010, 2003r, 2001r]

Κ3/02

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)[2013,
2008r,
2002]

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$$

είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c = c$$

οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha)$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) \quad \blacksquare$$