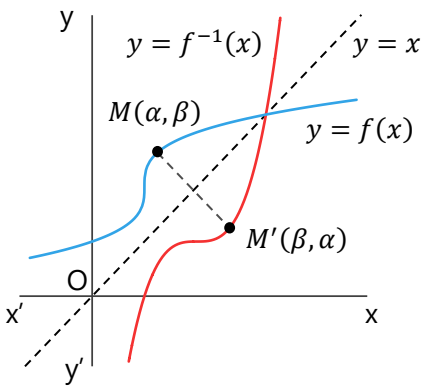
Κεφ.	ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ	ΕΤΟΣ

K1/01 Να αποδείξετε ότι:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

Απόδειξη

Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και C, C' οι γραφικές παραστάσεις των f και της f^{-1} αντίστοιχα στο ίδιο σύστημα αξόνων όπως στο σχήμα



Επειδή

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε

$$(\alpha, \beta) \in C_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha \Leftrightarrow (\beta, \alpha) \in C_{f^{-1}}$$

Επομένως το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμος 1ης - 3ης γωνίας των αξόνων) . ■

K1/02 Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι, $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} P(x) &= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0} (\alpha_0) \\
&= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu {x_0}^\nu + \alpha_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \quad ■$$

K1/03 Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$ είναι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad ■$$

K1/04 **Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** [2020, 2015, 2005]

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

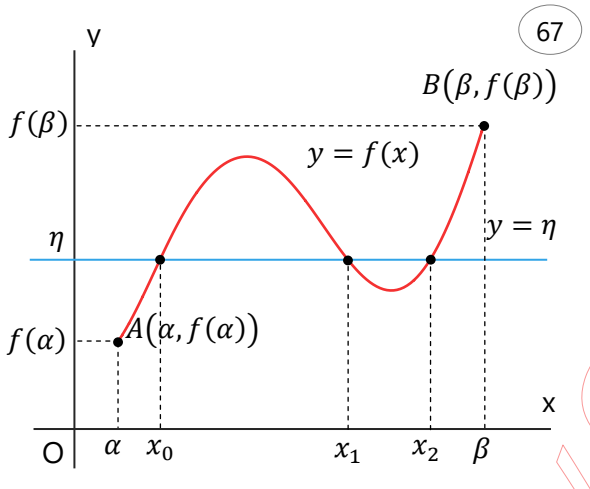
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, **τουλάχιστον** $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67).

67



Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$ ■

K2/01 **ΘΕΩΡΗΜΑ** [2022r, 2018, 2013r, 2007r, 2003, 2000]

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΖΟΚΙΝΟΣ

K2/02 Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

δηλαδή

$(c)' = 0.$ ■

K2/03 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$(x)' = 1$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

δηλαδή

$(x)' = 1.$ ■

K2/04 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - {x_0}^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + {x_0}^{\nu-1})}{x - x_0}$$

$$= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + {x_0}^{\nu-1}$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + {x_0}^{\nu-1})$$

$$= {x_0}^{\nu-1} + {x_0}^{\nu-1} + \cdots + {x_0}^{\nu-1}$$

$$= \nu\, {x_0}^{\nu-1}$$

δηλαδή

$\boxed{(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}}$. ■

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ

K2/05 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[2009r, 2005r]

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

δηλαδή

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Όπως είδαμε στην §3.1 η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0**. ■

K2/06 **ΘΕΩΡΗΜΑ-Παράγωγος αθροίσματος**

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

[2023, 2020r, 2020*]

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$=f'(x_0)+g'(x_0)$

δηλαδή

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ ■

K2/07 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\left(x^{\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$$

δηλαδή

$\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$ ■

K2/08 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi\, x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x|\, \sigma\upsilon\nu\, x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$(\varepsilon\varphi\, x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi\, x)' = \left(\frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}\right)' = \frac{(\eta\mu\, x)'\, \sigma\upsilon\nu\, x - \eta\mu\, x\, (\sigma\upsilon\nu\, x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x + \eta\mu\, x\, \eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Δηλαδή

$$(\varepsilon\varphi\, x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \blacksquare$$

K2/09 Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Απόδειξη

Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \blacksquare$$

ΣΧΟΛΙΟ: Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

K2/10 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή:

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

Απόδειξη

Αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha \quad \blacksquare$$

K2/11 Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: [2008]

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη

Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ενώ

Αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \blacksquare$$

Ή αφού $\sqrt{x}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ η $|x| = \sqrt{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, έτσι:

$$(\ln|x|)' = \left(\ln\left(\sqrt{x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \left(\sqrt{x^2}\right)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|^2} = \frac{1}{x}$$

K2/12 **ΘΕΩΡΗΜΑ** [2021r, 2014, 2009, 2004r]

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν:

η f είναι συνεχής στο Δ και

$f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι,

Αν $x_1, = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

K2/13 **ΠΟΡΙΣΜΑ**

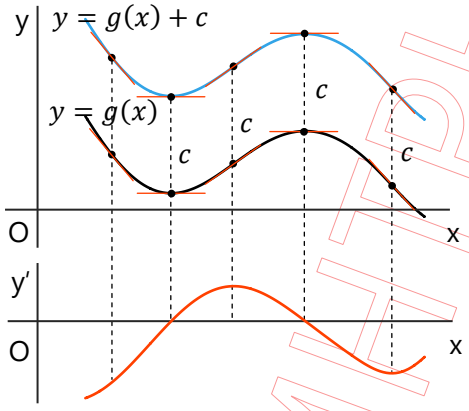
Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη



Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει,

$f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ

K2/14

Θεώρημα (μονοτονίας)

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ.

Να αποδείξετε ότι

- αν $f'(x) > 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

[2023r 2021, 2019, 2017, 2012, 2006*, 2000r]

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

  Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

  $$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

  Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

K2/15

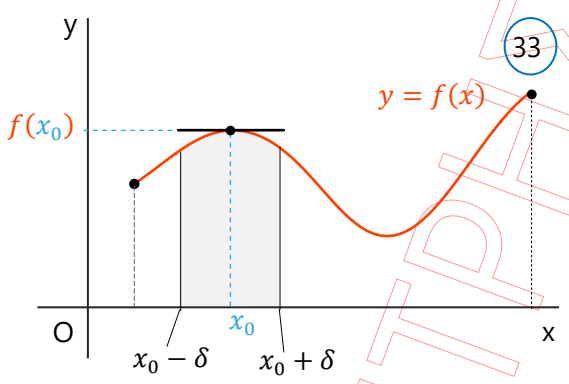
ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0$$

[2017re, 2016re, 2011, 2004]

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Leftrightarrow \boxed{f(x) - f(x_0) \le 0}$ (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (2)$$

Επομένως,

αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{(1)}{\ge} 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \quad (2)$$

αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{(1)}{\le} 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε

$$f'(x_0) = 0$$

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

K2/17 **ΘΕΩΡΗΜΑ (ακρότατα - μονοτονία)** [2020*r, 2019r, 2016, 2012r, 2018r, 1014r]

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α) [2020*r, 2019r, 2016, 2012r]

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). (Σχ. 35γ). [2018r, 1014r]

Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

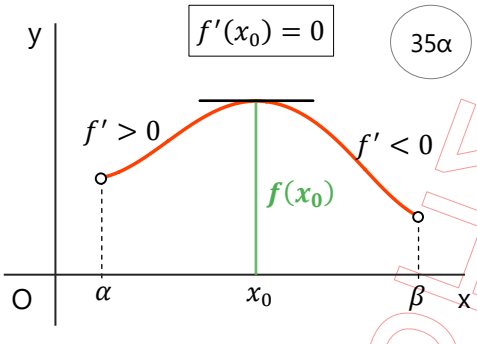
Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

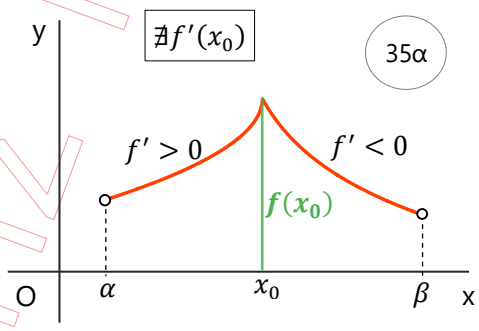
$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

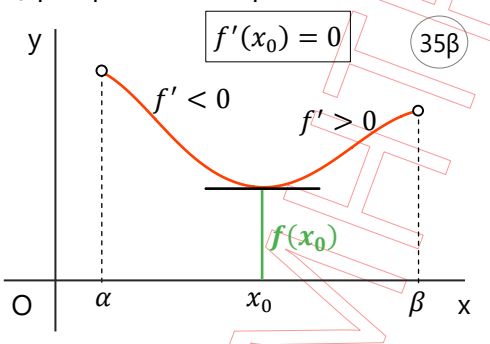
$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

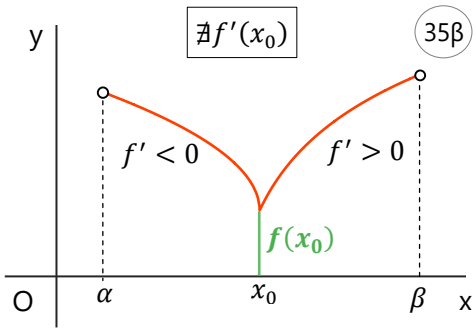
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.





ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.





Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$x\le x_0\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$x\ge x_0\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

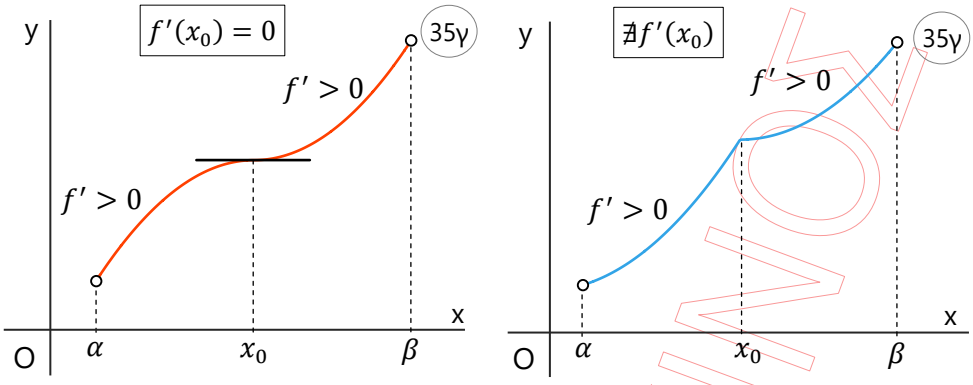
$f(x)\ge f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Μιχάλης Κοκκινός

iii) Έστω ότι

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ **δεν είναι τοπικό ακρότατο** της f.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

K3/01 **ΘΕΩΡΗΜΑ** [2022, 2015r, 2010, 2003r, 2001r]

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
$$G(x) = F(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$
είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
$$G(x) = F(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού
$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε
$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$
Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της §2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε
$G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$. ■

K3/02 **ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)** [2013, 2008r, 2002]

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$G(x) = F(x) + c$ (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$$

οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha)$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) \quad \blacksquare$$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΖΟΚΙΝΟΣ