

Κεφ.	ΟΡΙΣΜΟΙ	ΕΤΟΣ
K1/01	Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$). Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A; ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow f(x)$ πεδίο ορισμού: $A = D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$ σύνολο τιμών: $f(A) = f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$	[2019 2018r]
K1/02	Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$). Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f; ΟΡΙΣΜΟΣ Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.	
K1/03	Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; [2021, 2020, 2016, 2012r, 2007] ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: • έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και • για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g = A \\ \text{και} \\ f(x) = g(x), \forall x \in A \end{cases}$	[2021 2020 2016 2012r 2007]

Κ1/04

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Πώς ορίζονται οι πράξεις, άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$, των δύο συναρτήσεων;

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f + g$, **διαφορά** $f - g$, **γινόμενο** fg και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Με πεδία ορισμού:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = A \cap B$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x/x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

Κ1/05

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$: $D_{g \circ f} = A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$

Η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$ δηλαδή αν $f(A) \cap D_g \neq \emptyset$ και **είναι το κριτήριο για το αν ορίζεται ή όχι** η σύνθεση

Κ1/06

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** (συμβολίζεται $f \nearrow \Delta$) σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- **γνησίως φθίνουσα** (συμβολίζεται $f \searrow \Delta$) σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Κ1/07

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα και πότε φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς:

αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Κ1/08

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** .

- Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Κ1/09

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; [2014, 2010r]

[2014

2010r]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο της συνάρτησης $f \Rightarrow f(x_0) = \max_A f$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται ελάχιστο της συνάρτησης $f \Rightarrow f(x_0) = \min_A f$

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

Κ1/10

Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

[2015r

2005r]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1 – 1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1 – 1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Κ1/11

i) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

[2019]

ii) Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

i) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι **1 – 1** στο A

ii) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **1 – 1** τότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Η **αντίστροφη συνάρτηση** της f , συμβολίζεται με f^{-1} , με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται σε μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

δηλαδή η f^{-1} :

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Επομένως έχουμε:

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

Και ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

K1/12	Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. [2021, 2020*r, 2016r,]	[2021 2020*r 2016r]
-------	---	---------------------------

Κριτήριο παρεμβολής.Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, κοντά στο x_0 και επιπλέον
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

K1/13	Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.
-------	---

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

K1/14	Πότε λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$;
-------	--

Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει:

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

Σημείωση: Στα όρια ακολουθιών ισχύουν όσες ιδιότητες έχουν αναφερθεί στα όρια συναρτήσεων στο $+\infty$.

K1/15	Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0; [2015, 2009r]	[2015 2009r]
-------	--	-----------------

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** , όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

K1/16	Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής;
-------	---

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

K1/17	Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; [2021r, 2017, 2013, 2012, 2008]	[2021r 2017 2013 2012 2008]
-------	--	---

Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. [2004r]

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

K1/18

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano. [2020*, 2014r]

[2020*

Ερμηνεύστε γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

2014r]

Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

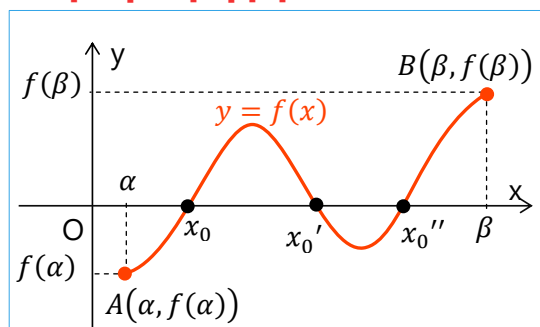
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία:



Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

K1/19

Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

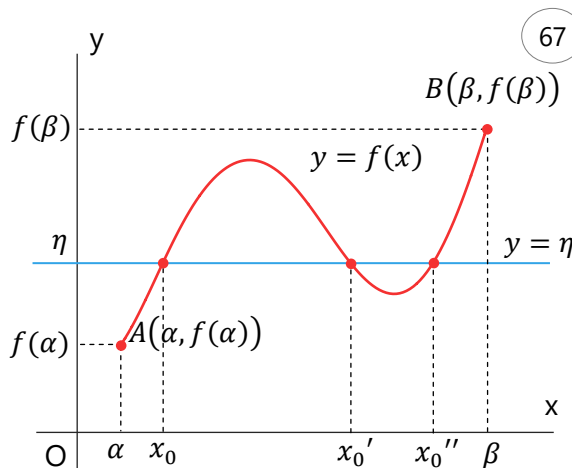
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \eta$ στο (α, β) .

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

K1/20

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

- Η παράλληλη ευθεία $y = \eta$ προς τον $x'x$ θα τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$. (Στο παράδειγμα του σχήματος στα σημεία x_0, x_0', x_0'').
- Κάθε σημείο του άξονα $y'y$ που βρίσκεται ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ θα είναι τιμή της συνάρτησης f .



67

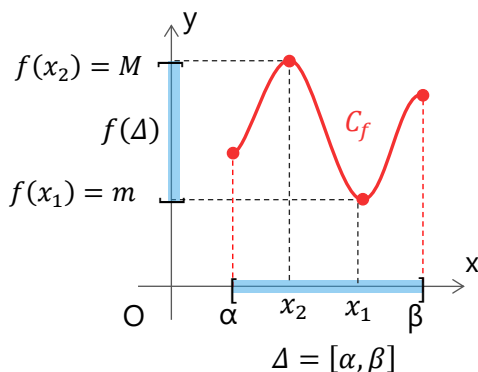
Κ1/21

Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\min_{[\alpha, \beta]} f = m \leq f(x) \leq M = \max_{[\alpha, \beta]} f, \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$



Κ2/01

Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ **ΟΡΙΣΜΟΣ**

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$$

Κ2/02

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ [2000]

[2000]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν , υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Κ2/03

Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; [2009, 2004]

[2009
2004]**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι **πραγματικός αριθμός**.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Κ2/04

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f : είναι **παραγωγίσιμη;** είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;** είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;** [2023, 2020, 2013, 2010r]

[2023
2020
2013
2010r]**ΟΡΙΣΜΟΙ**

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Κ2/05

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f ; [2020*]

[2020*]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** .

Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι". Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$

Κ2/06

Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 . Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Κ2/07

Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. [2023, 2020r]**Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. [2021, 2012r]****Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; [2007r, 2003]**

[2023

2021

2020r

2012r

2007r

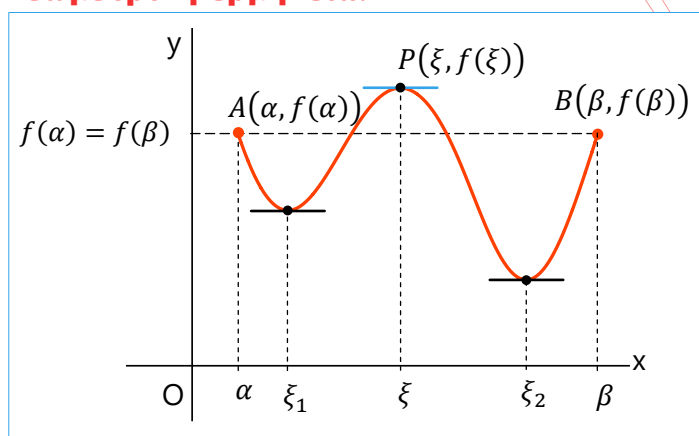
2003]

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β) .**Γεωμετρική ερμηνεία:**Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x

Κ2/08

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.) και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. [2022r, 2019r, 2016, 2013, 2008]

[2022r

2019r

2016

2013

2008]

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

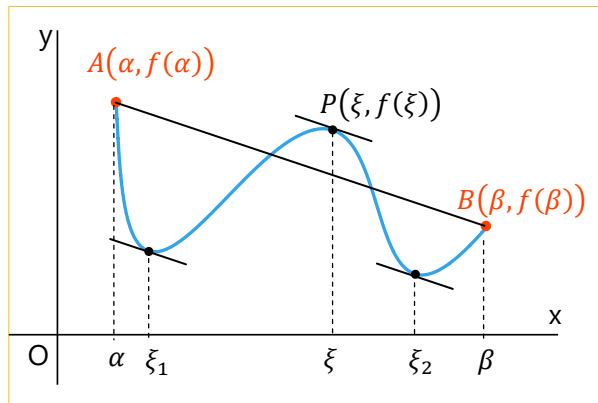
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Κ2/09

Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; [2019r, 2008r, 2007E, 2003]

[2019r
2008r
2007E
2003]

Θεώρημα Μέσης Τιμής



Γεωμετρική ερμηνεία: υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $P(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB , που ορίζουν τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Φυσική ερμηνεία: κατά την ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή $t_0 \in (t_1, t_2)$ τέτοια ώστε η ταχύτητα του κινητού τη στιγμή t_0 να ισούται με την μέση ταχύτητα του.

Κ2/10

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει f στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; [2020r, 2012]

[2020r
2012]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

Κ2/11

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο; [2015]

[2015]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

Κ2/12

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. [2023r, 2022, 2019, 2013r]

[2023r
2022
2019
2013r]

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Κ2/13

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο Δ ;

Οι **πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Κ2/14

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ; [2013r]

[2013r]

Κρίσιμα σημεία

Τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία:

- η f δεν παραγωγίζεται ή
- η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν,

λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ .

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

Το x_0 είναι **πιθανή θέση ακροτάτου** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ αν:

- $f'(x_0) = 0$
 - δεν υπάρχει η $f'(x_0)$
 - είναι κλειστό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού
- } κρίσιμα σημεία

Κ2/15

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ; [2014, 2010, 2006]

[2014
2010
2006]

ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω μία συνάρτηση f **συνεχής** σ' ένα διάστημα Δ και **παραγωγίσιμη** στο **εσωτερικό** του Δ ($\Delta^{\text{εσωτ}}$). Θα λέμε ότι:

- Η f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η $f' \nearrow \Delta^{\text{εσωτ}}$
- Η f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η $f' \searrow \Delta^{\text{εσωτ}}$

K2/16

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

K2/17

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της f στο Δ ;

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- τα **εσωτερικά σημεία** του Δ στα οποία η f'' **μηδενίζεται**, και
- τα **εσωτερικά σημεία** του Δ στα οποία **δεν υπάρχει** η f''

K2/18

Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** [2022, 2020*r, 2015r, 2010, 2003r]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f

[2022
2020*r
2015r
2010
2003E]

K2/19

Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$; [2023r, 2016r, 2007]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

[2023r
2016r
2007]

K2/20

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, ($\lambda \neq 0$) λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

αντιστοίχως στο $-\infty$ αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

[2022r
2011
2005]

Κ2/21

Να διατυπώσετε τους κανόνες de l' Hospital.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και
- υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και
- υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Κ3/01

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

[2019r

2014r

ΟΡΙΣΜΟΣ

2011r

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

2006r]

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Κ3/02

Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

[2018]

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$