ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΕΝ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Βασικές Προτάσεις που δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο και τις οποίες **μπορείτε να τις χρησιμοποιείτε, αναπόδεικτα,** στην επίλυση ασκήσεων

§1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πρόταση 1. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

Απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (1)

ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ: δεν ισχύει το $x_1 < x_2$, Τότε θα ισχύει: $x_1 \geq x_2$.

Όμως

- Αν $x_1 > x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, που αντίκειται στην (1)
- Αν $x_1 = x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ που αντίκειται και αυτό στην (1)

Επομένως το $x_1 \geq x_2$ είναι άτοπο, έτσι ισχύει το ζητούμενο $x_1 < x_2$

ii) Αντίστοιχη με την i)

§1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Διάταξη και άπειρο όριο

Πρόταση 2. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

και

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

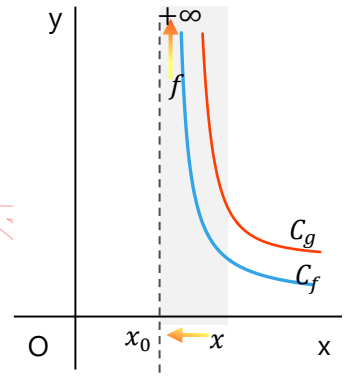
ii) Αν ισχύουν:

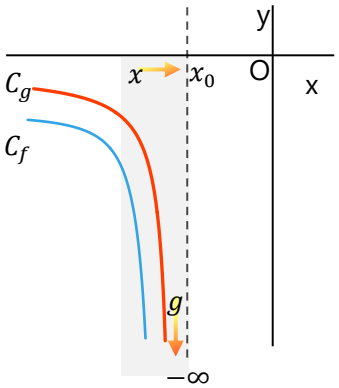
α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

και

β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.





Απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ κοντά στο x_0 $\Rightarrow 0 < f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \ge \dfrac{1}{g(x)} > 0 \\ \text{όμως και} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{κ.π}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{g(x)} > 0 \quad \text{κοντά στο } x_0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

§1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Bolzano & Όρια

Για την επίλυση ασκήσεων μπορεί να χρησιμοποιείται, αναπόδεικτα, η πρόταση:

Πρόταση 3. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$$

ή

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = -\infty$$

τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$, δηλ.

$$f(\Delta) = (-\infty, +\infty)$$

Ισχύει και για $\Delta = (\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \beta)$ ή $(-\infty, +\infty)$

Απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(\Delta) = \mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\begin{cases} f(\Delta) \subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \subseteq f(\Delta) \end{cases}$

- Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in \Delta : f(x) = y\}$. ($\exists$: υπάρχει)

  Προφανώς "αν $y \in f(\Delta)$ τότε $y \in \mathbb{R}$" άρα $f(\Delta) \subseteq \mathbb{R}$ (1)

- Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{R} \subseteq f(\Delta) \Leftrightarrow$ Αρκεί να δείξουμε ότι "αν $y \in \mathbb{R}$ τότε $y \in f(\Delta)$"

  $\Leftrightarrow$ Αρκεί να δείξουμε ότι "αν $y \in \mathbb{R}$ τότε $\exists x_0 \in \Delta : f(x_0) = y$"

Έστω τυχαίο $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$ και έχουμε:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} (f(x) - y) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\beta^-} g(x) = \lim\limits_{x\to\beta^-} (f(x) - y) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0, & \text{κοντά στο } \alpha \\ g(x) > 0, & \text{κοντά στο } \beta \end{cases}$$

Επομένως θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$.

Έτσι από το θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]$, η g θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο ανοικτό διάστημα $(x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ και θα είναι $g(x_0) = 0$. Επομένως "$\exists x_0 \in \Delta$ ώστε $f(x_0) = y$" δηλαδή ο y θα είναι τιμή της f, άρα $y \in f(\Delta)$. Έτσι $\mathbb{R} \subseteq f(\Delta)$ (2)

Επομένως από (1), (2) $\Rightarrow f(\Delta) = \mathbb{R}$ ■

Πρόταση 4. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

Πρόταση 5. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

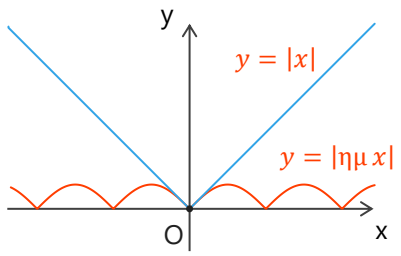
Βασικές ανισότητες

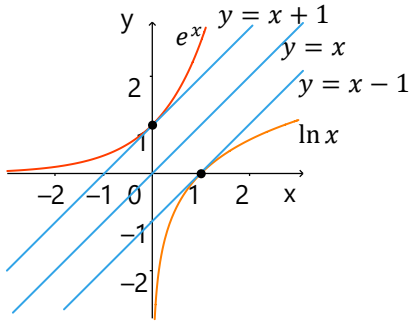
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\eta\mu\, x| \leq |x|$

  Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $|\eta\mu\, x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$
- Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1$

  Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$

  Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$
- Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1 < x < x + 1 \leq e^x$





Πρόταση 6. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Ισχύει ότι: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$, ($c \in \mathbb{R}$, σταθερός αριθμός)

§3.1

Πρόταση 7. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε:
Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ και
Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf
Γενικά:
Η συνάρτηση $\lambda F + \kappa G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $\lambda f + \kappa g$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$

§3.4

Πρόταση 8. ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

- Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει
$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$$
- Αν , επιπλέον οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: .
$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx > \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΑΛΙΝΟΣ

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} f\,,g \ \text{ συνεχείς } [\alpha,\beta] \\ f(x)\geq g(x)\,,\forall x\in[\alpha,\beta] \end{array}\right\}\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} f(x)\geq g(x)\,,\forall x\in[\alpha,\beta] \\ f\,,g \ \text{ συνεχείς } [\alpha,\beta] \\ f\neq g \end{array}\right\}\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx}$$

Απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

- Αφού με $f(x)\geq g(x)$ τότε:

$f(x)-g(x)\geq 0$ και $f(x)-g(x)$ συνεχής συνάρτηση ως διαφορά συνεχών,

Άρα

$$\int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)\,dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

- Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$, τότε η h είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Επίσης $h(x)=f(x)-g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, με $f(\xi)\neq g(\xi)\Rightarrow h(\xi)\neq 0$ άρα η συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, επομένως

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΛΟΚΚΙΝΟΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

§1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πρόταση 9. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο A, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο $f(A)$.

Απόδειξη 1: (απαιτείται)

Έστω $f \nearrow A$, τότε αν $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(A)$ με

$$y_1 < y_2 \overset{*}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(y_1)\right) < f\left(f^{-1}(y_2)\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

άρα $f^{-1} \nearrow D_{f^{-1}} = f(A)$

* αφού $\forall y \in D_{f^{-1}} = f(A)$ ισχύει $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$

Απόδειξη 2: (απαιτείται)

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$. Τότε, υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{array}{c} f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \\ \text{όμως} \\ f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A \end{array}\right\} \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 \geq y_2,$$ το οποίο είναι άτοπο, αφού $y_1 < y_2$.

Συνεπώς, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Τελικά:

Αν μία συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

Πρόταση 10. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

- Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f^{-1}(x_0) = f(x_0)$.
  Τότε:
  $$f\left(f^{-1}(x_0)\right) = f\left(f(x_0)\right) \Rightarrow x_0 = f\left(f(x_0)\right) \quad (1)$$
  - Αν $f(x_0) < x_0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right) < f(x_0) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_0 < f(x_0)$, άτοπο.
  - Αν $f(x_0) > x_0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right) > f(x_0) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_0 > f(x_0)$, άτοπο.

  Συνεπώς, είναι: $f(x_0) = x_0$
- Αντιστρόφως, έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = x_0$.
  Τότε:
  $x_0 = f^{-1}(x_0)$ οπότε: $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$

Τελικά:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

δηλαδή οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

ΔΑΝΙΤΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ

§ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πρόταση 11. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(|f(x)|) = 0$ τότε:

$$\left.\begin{array}{c} -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\text{, κοντά στο } x_0 \\ \text{όμως} \\ \lim\limits_{x\to x_0}(-|f(x)|) = \lim\limits_{x\to x_0}(|f(x)|) = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Κ.Π.}}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

- Αντίστροφα, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |0| = 0$

Πρόταση 12. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = 0$ τότε για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{c} -\sqrt{f^2(x)} = -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \\ \text{όμως} \\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right) = -\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)} = -\sqrt{0} = 0 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)} = \sqrt{0} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Κ.Π.}}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

- Αντίστροφα, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^2 = 0^2 = 0$

§1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πρόταση 13. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Η } f \text{ συνεχής στο } (\alpha,\beta) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα} \\ x_0 \in (\alpha,\beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f(x_0) = 0 \end{array}\right.$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

Έστω $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) < 0$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) > 0$ (ή ανάποδα $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) > 0$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) < 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) < 0 \\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0, & \text{κοντά στο } \alpha^+ \\ f(x) > 0, & \text{κοντά στο } \beta^- \end{cases}$$

Επομένως θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ ώστε $f(x_1) < 0$ και $f(x_2) > 0$.

Έτσι από το θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]$, η f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο ανοικτό διάστημα $(x_1, x_2) \subset (\alpha,\beta)$ και θα είναι $f(x_0) = 0$.

Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ ■

Πρόταση 14. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Έστω $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και "1 − 1" συνάρτηση , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ. (για διδακτικούς λόγους)

Απόδειξη: (απαιτείται)

Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και δεν ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \text{ ή } f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$$

Άρα η τιμή $f(x_2)$ δεν είναι ενδιάμεσα στις $f(x_1)$, $f(x_3)$ τότε θα βρίσκεται στο άκρο, δεδομένου όμως ότι $x_1 < x_2 < x_3 \overset{f:1-1}{\Rightarrow} f(x_1) \neq f(x_2), f(x_1) \neq f(x_3), f(x_2) \neq f(x_3)$, οπότε θα είναι:

α) $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ ή

β) $f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$ ή

γ) $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ ή

δ) $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$

α) Αν είναι $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \underset{f|[x_2,x_3]}{\overset{\text{ΘΕΤ}}{\Rightarrow}}$ υπάρχει $\xi \in (x_2, x_3)$ ώστε $f(\xi) = f(x_1) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} \xi = x_1$ το οποίο είναι άτοπο , αφού $x_1 < x_2 < \xi < x_3$.

Παρόμοια και στις άλλες 3 περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο . Έτσι απορρίπτεται η υπόθεση μας. Επομένως:

η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ

Πρόταση 15. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει δύο ρίζες τότε η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Απόδειξη: (απαιτείται)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έστω ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο ρίζες της f με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Τότε στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2] \subset \mathbb{R}$ ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2) : f'(\xi) = 0$.

Πρόταση 16. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης f

Απόδειξη: (απαιτείται)

Έστω ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο διαδοχικές ρίζες της f'.

Υποθέτουμε ότι: η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ άρα θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Τότε στο κλειστό διάστημα $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subset (\rho_1, \rho_2) : f'(\xi) = 0$.

Συνεπώς η f' έχει ρίζα ανάμεσα στις διαδοχικές της ρ_1, ρ_2 **άτοπο**, άρα η f δεν έχει δύο ρίζες άρα η f θα έχει το πολύ μία ρίζα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f'

Πρόταση 17. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει τρείς ρίζες τότε η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία.

Απόδειξη: (απαιτείται)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό και έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 τρείς διαδοχικές ρίζες της f με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ $(\rho_1 < \rho_2 < \rho_3)$. Τότε στα κλειστά διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$, δηλαδή η f' έχει δυο τουλάχιστον ρίζες. Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και επειδή ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$, δηλαδή η f'' έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Γενικότερα, αν μία συνάρτηση f είναι ν -φορές παραγωγίσιμη ($\nu \in N$ με $\nu \geq 1$) και έχει $\nu + 1$ ρίζες τότε η $f^{(\nu)}$ (νιοστή παράγωγος) έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Πρόταση 18. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

Απόδειξη: (απαιτείται)

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στο $[x_1, x_2]$. Έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα ισχύουν για την f στο $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subset (\rho_1, \rho_2) : f'(\xi) = 0$ άτοπο γιατί $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Πρόταση 19. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και f άρτια. Να δείξετε ότι f' περιττή.

Απόδειξη: (απαιτείται)

Επειδή η f είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$f(-x) = f(x)$$

η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε :

$(f(-x))' = (f(x))' \Leftrightarrow f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow$
f' περιττή

ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Πρόταση 20. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

ανισοτητα Jensen (για διδακτικούς λόγους)

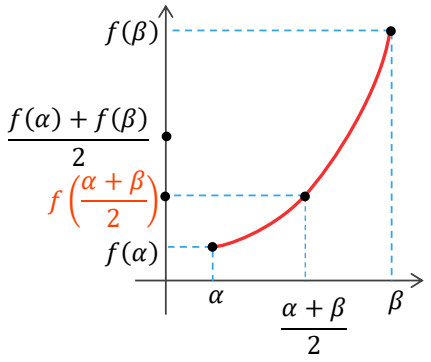
Έστω συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \Delta$

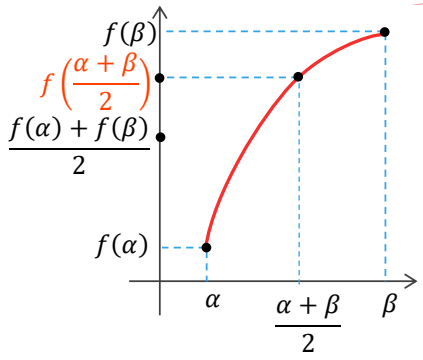
i. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (ή f' γν.αυξ) στο Δ τότε ισχύει:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη (ή f' γν.φθ.) στο Δ τότε ισχύει:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \ge \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$





Απόδειξη i.: (απαιτείται)

Αν $\alpha = \beta$ τότε η (1) δίνει $f(\alpha) \le f(\alpha)$ η οποία ισχύει ως ισότητα.

Έστω $\alpha < \beta$, θεωρούμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ το οποίο έχει μέσο το $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και ισχύει $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα δυο υποδιαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ $\Rightarrow$ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 2f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2f(\beta) - 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}$$

Η f είναι κυρτή στο Δ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και $\alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta$ οπότε έχουμε:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

$$\Rightarrow \frac{2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 2f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{2f(\beta) - 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}$$

$$\overset{(\beta-\alpha)>0}{\Rightarrow} 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 2f(\alpha) < 2f(\beta) - 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

Αν $\alpha > \beta$ εργαζόμαστε ανάλογα.

Απόδειξη ii.: (ομοίως)

Πρόταση 21. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ, αντιστρέφεται και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad , \quad x \in f(\Delta)$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

Πράγματι, για κάθε $x \in f(\Delta)$ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ επομένως

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)' = (x)' \Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}, \quad x \in f(\Delta)$$

Πρόταση 22. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν $y = f(x)$ παραγωγίσιμη στο Δ και έχει f^{-1} συνεχή στο $f(\Delta)$ τότε f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x)$ στο οποίο $f'(x) \neq 0$ και ισχύει:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{και} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

Με $x \in \Delta$ έχουμε

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f^{-1}(f(x) + \delta y) - f^{-1}\left(f(x)\right)}{\delta y} \qquad (1)$$

Έστω $f^{-1}(f(x) + \delta y) - f^{-1}\left(f(x)\right) = \delta x \qquad (2)$

f^{-1} συνεχής στο $f(\Delta) \Rightarrow \lim_{\delta y \to 0} f^{-1}(f(x) + \delta y) = f^{-1}\left(f(x)\right) \Rightarrow \lim_{\delta y \to 0} \delta x = 0$,

άρα $\delta x \to 0$ καθώς $\delta y \to 0 \qquad (3)$

Από (2) παίρνουμε

$$f^{-1}(f(x) + \delta y) - f^{-1}\left(f(x)\right) = \delta x \Rightarrow f^{-1}(f(x) + \delta y) = x + \delta x$$

$$\Rightarrow f(x) + \delta y = f(x + \delta x)$$

$$\Rightarrow \delta y = f(x + \delta x) - f(x) \qquad (4)$$

Έτσι η (1) από (2),(3), (4) δίνει :

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta x}{f(x + \delta x) - f(x)} \\
&= \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}} \\
&= \frac{1}{\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}} \\
&= \frac{1}{f'(x)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Πρόταση 23. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν $y = f(x)$ παραγωγίσιμη στο Δ και f^{-1} παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in f(\Delta)$ για το οποίο $f'(x) \neq 0$ τότε ισχύει:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{και} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

Έχουμε $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ (1) και

$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow \left(f^{-1}(f(x))\right)' = (x)' \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}} \quad (2)$$

Όμως

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \overset{(1)}{=} \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{d\left(f^{-1}(y)\right)}{dy} \overset{(1)}{=} \frac{dx}{dy}$$

και $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, επομένως η (2) γίνεται:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

Πρόταση 24. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, γνησίως μονότονη και συνεχής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) \neq 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε:
η f^{-1} παραγωγίζεται στο $f(x_0)$ και ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Απόδειξη: (απαιτείται)

Αφού η f είναι συνεχής και γνήσια μονότονη τότε το σύνολο τιμών $f((\alpha, \beta))$ θα είναι ανοικτό διάστημα.
Έστω το ανοικτό διάστημα (γ, δ) .

Θέτουμε $y_0 = f(x_0)$. Έστω $y \in (\gamma, \delta) = f((\alpha, \beta))$ με $y \neq y_0$

Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει μοναδικό $x \epsilon (\alpha, \beta) : f(x) = y$.

Είναι $x \neq x_0$. Αφού η f^{-1} είναι συνεχής, αν $y \to y_0$ τότε

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow x \to x_0$$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Άρα η f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_0 = f(x_0)$ με

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \Leftrightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ

Πρόταση 25. ΘΕΛΕΙ απόδειξη

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f' διατηρεί πρόσημο στο Δ.

Απόδειξη: (απαιτείται)

Υποθέτουμε ότι η f' δεν διατηρεί πρόσημο στο Δ.

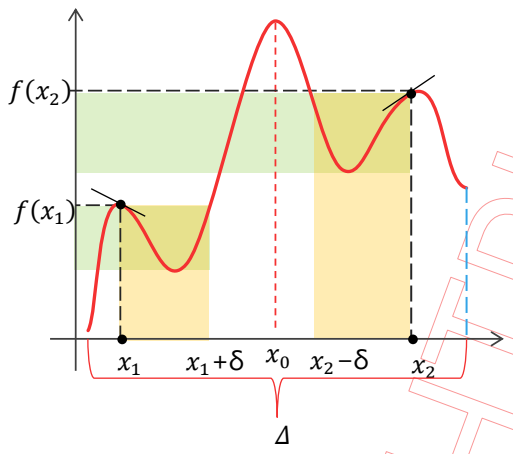
Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f'(x_1)f'(x_2) < 0$.

Έστω $x_1 < x_2$. Έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2] \subseteq \Delta$.

Ας θεωρήσουμε: $\begin{cases} f'(x_1) < 0 \\ f'(x_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0 \\ \lim\limits_{x \to x_2^-} \dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0 \text{ κοντά στο } x_1^+ \\ \dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} > 0 \text{ κοντά στο } x_2^- \end{cases}$$

$$\underset{x<x_2}{\overset{x>x_1}{\Rightarrow}} \begin{cases} f(x) - f(x_1) < 0 \text{ κοντά στο } x_1^+ \\ f(x) - f(x_2) < 0 \text{ κοντά στο } x_2^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(x_1) \text{ κοντά στο } x_1^+ \\ f(x) < f(x_2) \text{ κοντά στο } x_2^- \end{cases}$$



Οπότε η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο ούτε στο x_1 ούτε στο x_2, δηλαδή δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα άκρα του διαστήματος $[x_1, x_2]$.

Επειδή όμως η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως παραγωγίσιμη τότε έχει ελάχιστο στο $[x_1, x_2]$ σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του $[x_1, x_2]$ και σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$

Άρα, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, που είναι άτοπο, αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο και αν $\begin{cases} f'(x_1) > 0 \\ f'(x_2) < 0 \end{cases}$ ή $x_1 > x_2$

Άρα, η f' διατηρεί πρόσημο στο Δ.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ