

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΕΝ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Βασικές Προτάσεις που δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο και τις οποίες μπορείτε να τις χρησιμοποιείτε, αναπόδεικτα, στην επίλυση ασκήσεων

§1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ & ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

- Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (1)

ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ: δεν ισχύει το $x_1 < x_2$,

Τότε θα ισχύει: $x_1 \geq x_2$. Όμως

- Αν $x_1 > x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, που αντίκειται στην (1)
- Αν $x_1 = x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ που αντίκειται και αυτό στην (1)

Επομένως το $x_1 \geq x_2$ είναι άτοπο, έτσι ισχύει το ζητούμενο $x_1 < x_2$

- Αντίστοιχη με την i)

§1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

2. Διάταξη και άπειρο όριο

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Αν ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

και

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

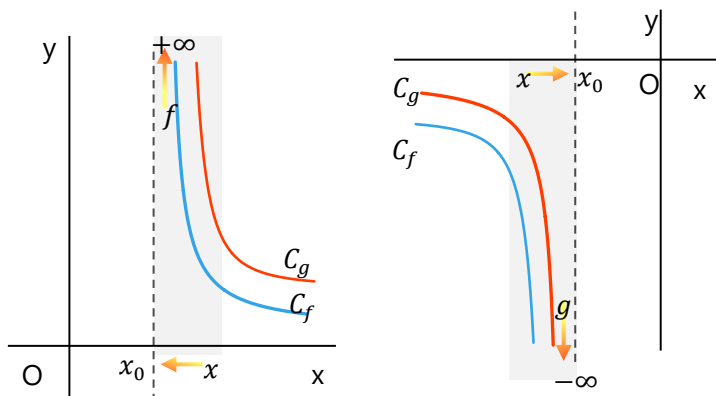
- Αν ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

και

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0 \Rightarrow 0 < f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{g(x)} > 0 \\ &\quad \text{όμως και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Κ.Π} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0 \text{ και } \frac{1}{g(x)} > 0 \text{ κοντά στο } x_0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

§1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3. Bolzano & Όρια Για την επίλυση ασκήσεων μπορεί να χρησιμοποιείται, αναπόδεικτα, η πρόταση:

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$$

τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$, δηλ.

$$f(\Delta) = (-\infty, +\infty)$$

Ισχύει και για $\Delta = (\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \beta)$ ή $(-\infty, +\infty)$

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(\Delta) = \mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\begin{cases} f(\Delta) \subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \subseteq f(\Delta) \end{cases}$

- Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \Delta : f(x) = y\}$. ($\exists$: υπάρχει)

Προφανώς "αν $y \in f(\Delta)$ τότε $y \in \mathbb{R}$ " άρα $f(\Delta) \subseteq \mathbb{R}$ (1)

- Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{R} \subseteq f(\Delta) \Leftrightarrow$ Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός y είναι τιμή της f .
 $\Leftrightarrow$ Αρκεί να δείξουμε ότι "αν $y \in \mathbb{R}$ τότε $y \in f(\Delta)$ " $\Leftrightarrow$ Αρκεί να δείξουμε ότι "αν $y \in \mathbb{R}$ τότε $\exists x_0 \in \Delta : f(x_0) = y$ "

Έστω τυχαίο $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$ και έχουμε:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} (f(x) - y) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \beta^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} (f(x) - y) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0, & \text{κοντά στο } \alpha \\ g(x) > 0, & \text{κοντά στο } \beta \end{cases}$$

Επομένως θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$.

Έτσι από το θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]$, η g θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο ανοικτό διάστημα $(x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ και θα είναι $g(x_0) = 0$. Επομένως " $\exists x_0 \in \Delta$ ώστε $f(x_0) = y$ " δηλαδή ο y θα είναι τιμή της f , άρα $y \in f(\Delta)$. Έτσι $\mathbb{R} \subseteq f(\Delta)$ (2)

Επομένως από (1), (2) $\Rightarrow f(\Delta) = \mathbb{R}$ ■

4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

ΔΕΝ ΘΕΛΕΙ απόδειξη

5. Βασικές ανισότητες

• Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\eta\mu x| \leq |x|$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$

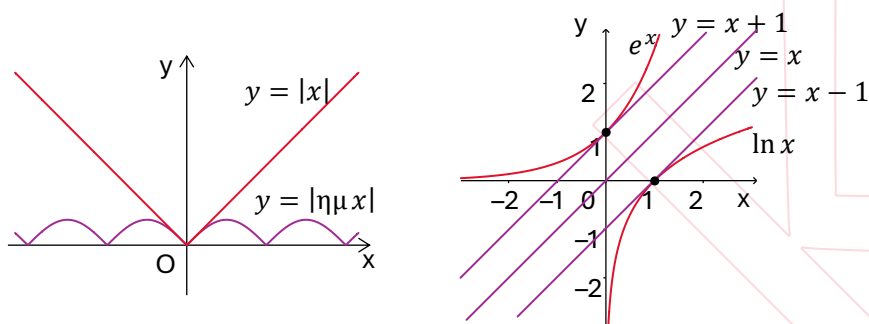
• Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, δηλαδή: $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$

• Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή: $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

• Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1 < x < x + 1 \leq e^x$



6. Ισχύει ότι: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$, ($c \in \mathbb{R}$, σταθερός αριθμός)

§3.1

7. πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$G(x) = \eta\mu x + c$, $c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c$, $c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x) = \epsilon\phi x + c$, $c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma\phi x + c$, $c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$
11	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Σημείωση:

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

8. Γραμμικός συνδυασμός παραγουσών

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε:

- Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ και
- Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf

Γενικά:

- Η συνάρτηση $\lambda F + \kappa G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $\lambda f + \kappa g$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$

§3.4

9. Ανισότητα & ολοκλήρωμα

- Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

- Αν, επιπλέον οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

- Αφού με $f(x) \geq g(x)$ τότε:

$f(x) - g(x) \geq 0$ και $f(x) - g(x)$ συνεχής συνάρτηση ως διαφορά συνεχών,

Άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

- Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, τότε η h είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Επίσης $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi) \Rightarrow h(\xi) \neq 0$ άρα η συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, επομένως

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

10. Γενικές Παρατηρήσεις:

- Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
- Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
- Εξαιρούνται από την ύλη: α) οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10 και β) οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ

Μπορείτε να τις χρησιμοποιείτε, αναπόδεικτα, στην επίλυση ασκήσεων

1. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.
Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ τότε f "1-1" στο Δ

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

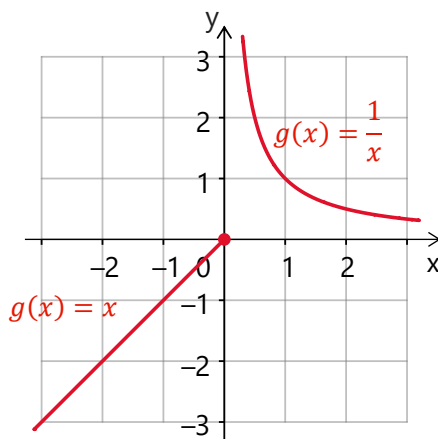
Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{αν } x_1 < x_2 \left\{ \begin{array}{l} f \text{ γν. αύξουσα} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ f \text{ γν. φθίνουσα} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right. \\ \text{ή} \\ \text{αν } x_1 > x_2 \left\{ \begin{array}{l} f \text{ γν. αύξουσα} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ f \text{ γν. φθίνουσα} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση η f "1-1" στο Δ

- Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, αφού, υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



Προσοχή: Με παράδειγμα

- μπορούμε να δεχτούμε την αλήθεια μιας άρνησης, δηλαδή ότι δεν ισχύει μια πρόταση αλλά
- **δεν μπορούμε να δεχτούμε** την αλήθεια μιας πρότασης

Έτσι,

- Αν μία συνάρτηση είναι **1-1** **δεν σημαίνει ότι είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη**

Όμως,

- Αν η f **δεν είναι** 1-1 τότε **δεν είναι και μονότονη**.
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **δεν είναι "1-1"** αν και μόνον αν υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

2. Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε η εξίσωση $f(x) = \zeta$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μία λύση στο A .

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

Θεωρούμε έναν αριθμό $\zeta \in \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε: "η εξίσωση $f(x) = \zeta$ έχει δύο λύσεις $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ "

$$\text{τότε: } \begin{cases} f(x_1) = \zeta \\ f(x_2) = \zeta \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f \text{ "1-1"}} x_1 = x_2, \text{ **άτοπο**.}$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \zeta$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο A .

- 3.** Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = \zeta$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μία λύση στο A .

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **γνησίως μονότονη** τότε f είναι "1-1" και σύμφωνα με το προηγούμενο η εξίσωση $f(x) = \zeta$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο A .

- 4.** Αν $\zeta \in f(\Delta) \Rightarrow \zeta = f(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \Delta \Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = \zeta$ έχει τουλάχιστον μια λύση ως προς x , αν όμως

- 5.** $\left. \begin{array}{l} \zeta \in f(\Delta) \\ \text{και} \\ f \text{ γν. μονότονη ή "1-1" στο } \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{η εξίσωση } f(x) = \zeta \text{ έχει ακριβώς μια} \\ \text{λύση (μοναδική λύση) ως προς } x \end{array} \right.$

- 6.** Αν μία συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε αντιστρέφεται

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

Αν $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **γνησίως μονότονη** τότε f είναι "1-1" στο Δ επομένως αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{-1} : f(\Delta) \rightarrow \Delta$ και ισχύουν:

- $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \forall x \in \Delta, y \in f(\Delta)$
- $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in \Delta$
- $f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in f(\Delta)$

- 7.** Αν μία f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ μία g γνησίως αύξουσα, και οι C_f και C_g έχουν κοινό σημείο τότε έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. 3.7 Β' ΟΜΑΔΑΣ ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια απόδειξη: (για διδακτικούς λόγους)

$f - g$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(x) - g(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει το πολύ μία λύση $\Leftrightarrow$ οι C_f και C_g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

§1.2

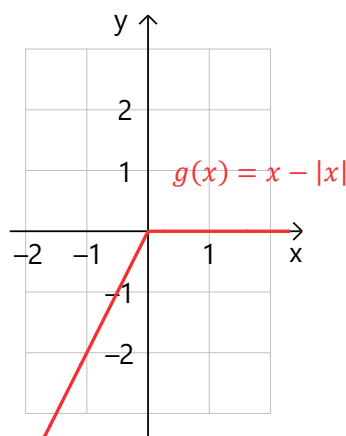
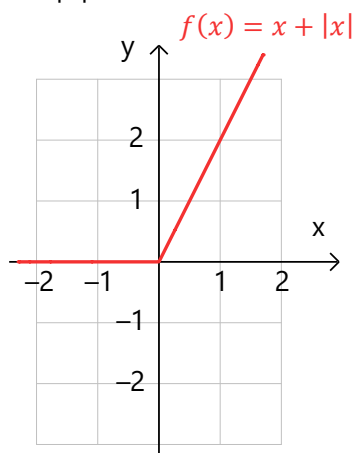
1. Από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\text{Αν } x_1, x_2 \in D_f \text{ και } x_1 = x_2 \text{ τότε ισχύει πάντα } f(x_1) = f(x_2)$$

Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα (ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, 1-1)

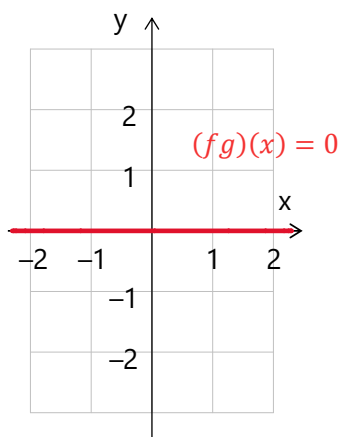
2. $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \forall x \in A \\ \text{ή} \\ g(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}$ **είναι λάθος**

Μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν. Ένα παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$



Ενώ:

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + |x|)(x - |x|) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$$



$$3. \quad f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), & \forall x \in A \\ \text{ή} \\ f(x) = -g(x), & \forall x \in A \end{cases} \quad \text{είναι λάθος}$$

Έστω η συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x|$$

Οι συναρτήσεις αυτές **δεν είναι μόνο δύο**. Υπάρχουν **άπειρες** τέτοιες συναρτήσεις:

$$f(x) = \eta\mu x, \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \text{ή}$$

$$f(x) = -\eta\mu x, \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \text{ή}$$

$$f(x) = |\eta\mu x|, \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \text{ή}$$

$$f(x) = -|\eta\mu x|, \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \text{ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & \forall x \in A \neq \emptyset \\ -\eta\mu x, & \forall x \in [0, 2\pi] - A \end{cases}, \quad \forall A \subseteq [0, 2\pi]$$

Δες κι αυτό : <https://ggbm.at/hxrpjNth>

$$4. \quad f^v(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in A$$

$$5. \quad f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, & \forall x \in A \\ \text{και} \\ g(x) = 0, & \forall x \in A \end{cases}$$

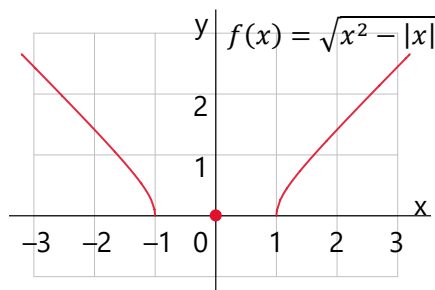
6. Μη λέτε: «Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο».

Καταρχάς, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις τύπο. Αλλά δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο μπορεί να είναι ίσες, όπως για παράδειγμα οι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ και $g(x) = 1$ δεν έχουν τον ίδιο τύπο αλλά $f = g$

§1.4

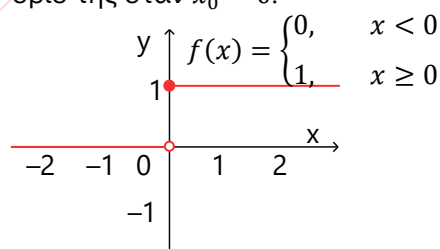
7. Είναι σημαντικό να γίνει **διάκριση** των εννοιών, «**δεν έχει νόημα**» το όριο και «**δεν υπάρχει**» το όριο.

- Ένα όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 «**δεν έχει νόημα**» ή «δεν ορίζεται» όταν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποια περιοχή «κοντά» στο x_0 .
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$ και το όριό της όταν $x_0 = 0$

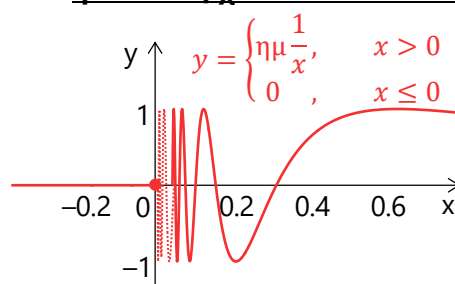


- Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 **δεν υπάρχει**, εννοούμε ότι το όριο έχει «νόημα», αλλά **τα πλευρικά του όρια δεν είναι ίσα**

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ και το όριό της όταν $x_0 = 0$.



ή δεν υπάρχει κάποιο από τα πλευρικά όρια

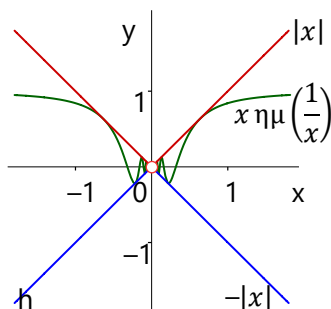


Καμία από αυτές τις συναρτήσεις δεν έχει όριο καθώς το $x \rightarrow 0$ (x τείνει στο 0)

- 8.** Η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0 , δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0

παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



Το όριο αυτό είναι παράδειγμα στο σχολικό βιβλίο και **μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς**

απόδειξη

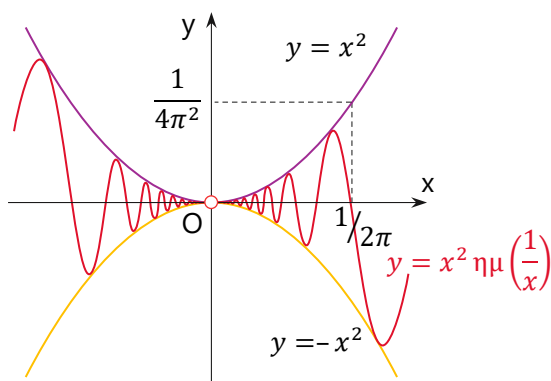
Απόδειξη

$$\begin{aligned} \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| &\leq 1 \quad \cdot |x| > 0 \Rightarrow \\ |x| \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| &\leq |x| \cdot 1 \Rightarrow \\ \left| x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| &\leq |x| \Rightarrow \\ -|x| &\leq x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad \left. \begin{array}{l} \text{κ.π.} \\ \text{και} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} |x| \end{aligned}$$

Εξάσκηση

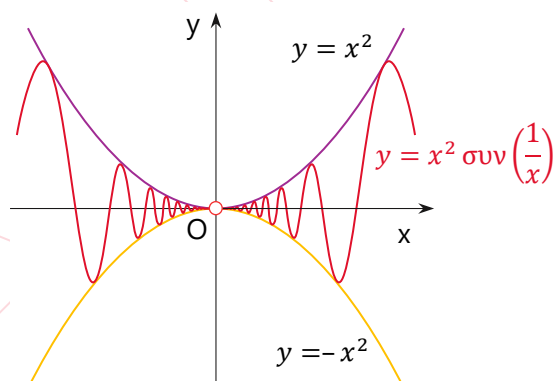
Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



Η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριό της όταν το x τείνει στο x_0 , καθώς και ότι η τιμή του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ καθορίζεται από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0 . Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 , αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (να παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια να ορίζεται και η άλλη να μην ορίζεται ή καμία να μην ορίζεται), έχουν το ίδιο όριο όταν το x τείνει στο x_0

9. Μεθοδολογία σημαντική (κριτήριο μηδενικής επί φραγμένης.)

όταν θέλουμε να βρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $|g(x)| < M$ με x κοντά στο x_0 , εργαζόμαστε με την εξής τεχνική:

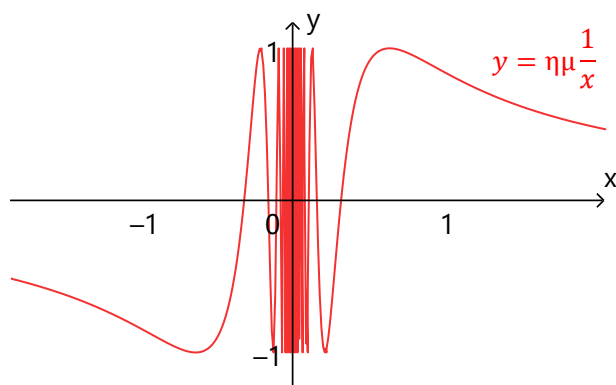
$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot M \Leftrightarrow |f(x) \cdot g(x)| \leq \kappa \cdot |f(x)| \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -M \cdot |f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot |f(x)| \\ \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (-M \cdot |f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} (M \cdot |f(x)|) = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{κ.π.}} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

Προσοχή Η συγκεκριμένη ιδιότητα, δηλαδή της μηδενικής επί φραγμένης δεν αναφέρεται στο βιβλίο, και επομένως θα πρέπει όποτε την χρησιμοποιούμε να την αποδεικνύουμε

10. Πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει, τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά!

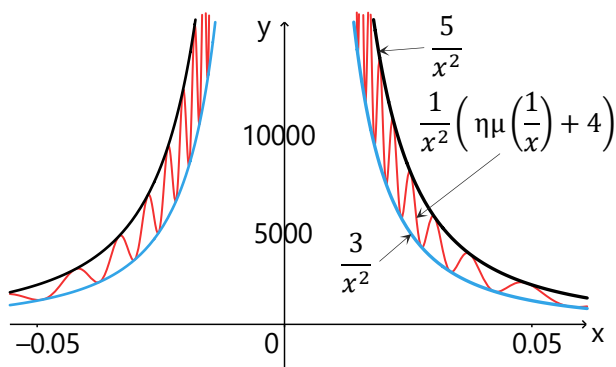
Εδώ καθώς το $x \rightarrow 0$ το όριο δεν υπάρχει αλλά ούτε και τα πλευρικά όρια υπάρχουν!!



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \text{ δεν υπάρχει} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \text{ δεν υπάρχει}$$

11. Η ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 δεν συνεπάγεται απαραίτητα μονοτονία

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \right)$$

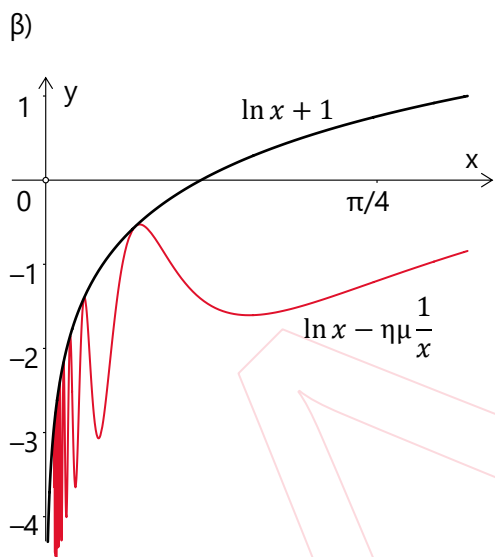


$$\begin{aligned} -1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 &\stackrel{+4}{\Rightarrow} 3 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \leq 5 \stackrel{\frac{1}{x^2} > 0}{\Rightarrow} \\ \frac{3}{x^2} &\leq \frac{1}{x^2} \left(\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \right) \leq \frac{5}{x^2} \\ \frac{3}{x^2} &\leq \frac{1}{x^2} \left(\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \right) \leq \frac{5}{x^2} \end{aligned}$$

όμως

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \stackrel{\text{κ.π.}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Το όριο της $f(x)$ είναι $+\infty$ αλλά η $f(x)$ δεν είναι μονότονη!!!



Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$-\eta\mu\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ln x - \eta\mu\frac{1}{x} \leq \ln x + 1}$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty + 1 = -\infty$$

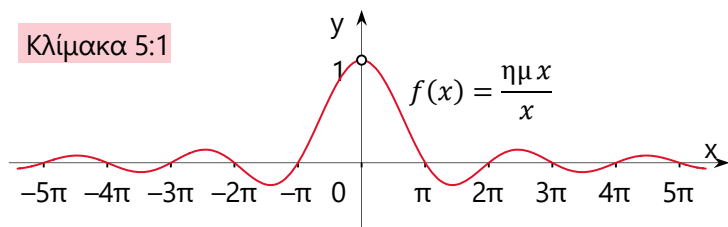
τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \eta\mu\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Το όριο της $f(x) = \ln x - \eta\mu\frac{1}{x}$ είναι $-\infty$ αλλά η $f(x)$ δεν είναι μονότονη!!!

- 12.** Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων το όριο, όταν το $x \rightarrow \pm\infty$ υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες.

Παράδειγμα η $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ στο παρακάτω σχήμα

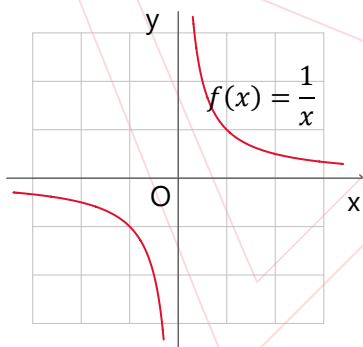


$$|\eta\mu x| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow \\ \text{και} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) \end{array} \right\} \text{κ.π.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

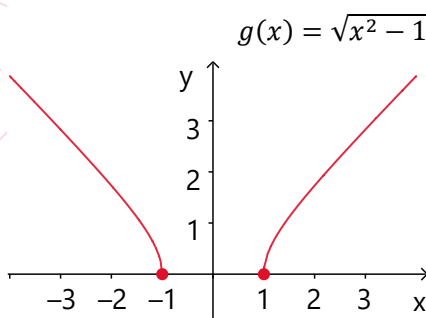
§1.8

- 13.** Παραδείγματα **συνεχών** συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, το γράφημα των συναρτήσεων αυτών **διακόπτεται**, παρόλο που είναι **συνεχείς**:

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

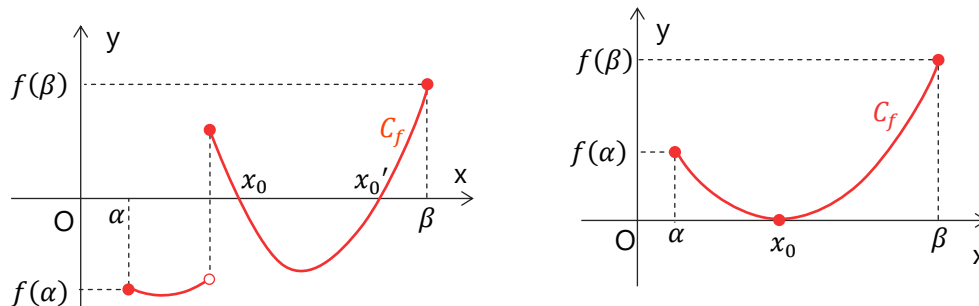


Η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ είναι συνεχής στο $D_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

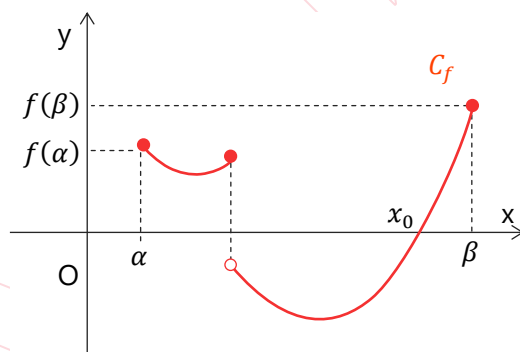


14. ΠΡΟΣΟΧΗ στην αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος Bolzano

- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία πραγματική συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$ δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι η f είναι συνεχής ή ότι οι τιμές $f(\alpha), f(\beta)$ είναι ετερόσημες δηλαδή $f(\alpha)f(\beta) < 0$.



- Επίσης ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$, πχ το $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = 0$ στο σχήμα



- Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει **την βεβαιότητα της ύπαρξης** τουλάχιστον μίας πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) ή το **αδύνατον της μη ύπαρξης ρίζας** στο (α, β) . Ωστόσο δεν αποκλείεται η ύπαρξη περισσότερων ριζών στο (α, β) .
- Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το ανοικτό διάστημα (α, β) , τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

- 15.** Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

