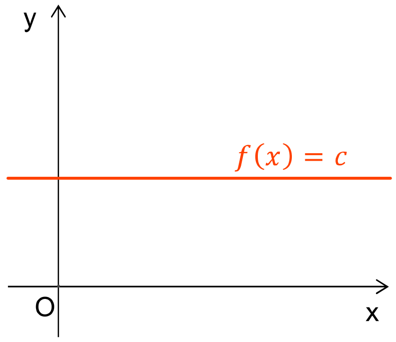
# ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ **ΒΑΣΙΚΩΝ** ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η έννοια της συνάρτησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη γραφική της παράσταση και η σύνδεση αυτή πρέπει να αναδεικνύεται σε κάθε ευκαιρία, διότι υποστηρίζει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

## Σταθερή Συνάρτηση

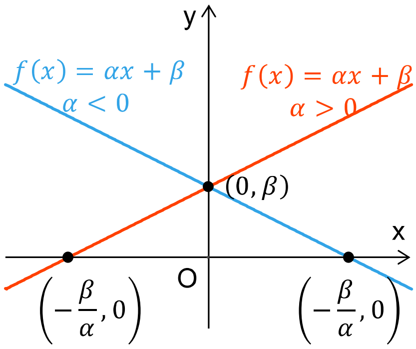
$f(x) = c$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $\{c\}$
- $y'y$-τομή: $(0, c)$
- $f$ σταθερή, ούτε ↗ , ούτε ↘

## Συνάρτηση Ευθείας

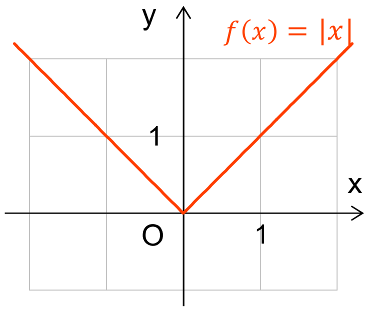
$f(x) = \alpha x + \beta$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- $x'x$-τομή: $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$
- $y'y$-τομή: $(0, \beta)$
- $f$ ↗ αν $\alpha > 0$
- $f$ ↘ αν $\alpha < 0$
- $f$: $1{-}1$

## Συνάρτηση Απόλυτη Τιμή

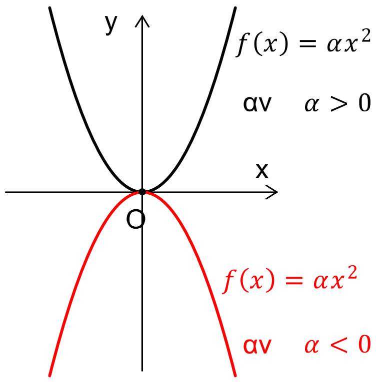
$f(x) = |x|$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $[0, +\infty)$
- x,y-τομή: $(0,0)$
- $f$ ↘ στο $(-\infty, 0]$
- $f$ ↗ στο $[0, +\infty)$
- $f$: όχι 1–1
- $f$ άρτια
- Συμμετρία ως προς $y$–άξονα

## Δευτεροβάθμια Συνάρτηση

$f(x) = \alpha x^2$



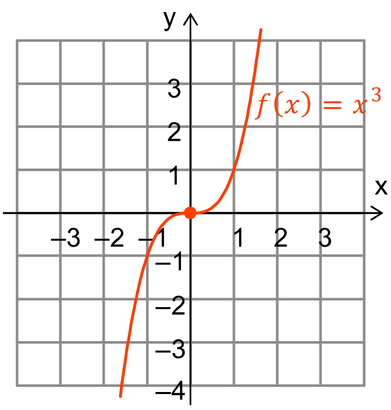

- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $[0, +\infty)$ $αν$ $\alpha > 0$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, 0]$ $αν$ $\alpha < 0$
- x,y-τομή: $(0,0)$
- $f$ ↘ στο $(-\infty, 0]$ αν $\alpha > 0$
- $f$ ↗ στο $[0, +\infty)$ αν $\alpha > 0$
- Ολικό Ελάχιστο $(0,0)$ αν $\alpha > 0$

- $f$ ↗ στο $(-\infty, 0]$ αν $\alpha < 0$
- $f$ ↘ στο $[0, +\infty)$ αν $\alpha < 0$
- Ολικό Μέγιστο $(0,0)$ αν $\alpha < 0$

- $f$ άρτια
- Συμμετρία ως προς $y$-άξονα
- Η κορυφή: $(0,0)$

## Κυβική Συνάρτηση

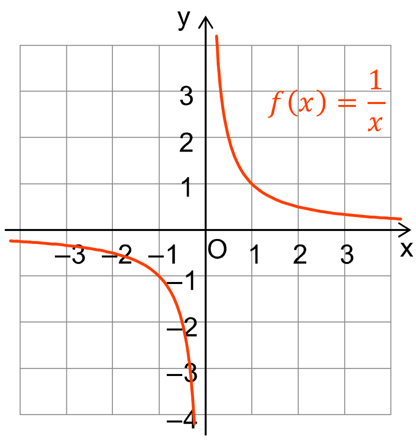
$f(x) = x^3$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- x,y-τομή: $(0,0)$
- $f$ ↗ στο $(-\infty, \infty)$
- $f$ 1–1
- $f$ περιττή
- Συμμετρία ως προς την αρχή O

## Ρητή Συνάρτηση

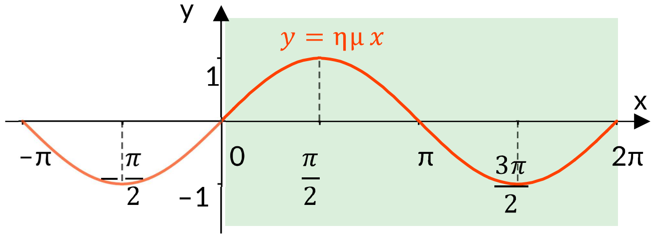
$f(x) = \frac{1}{x}$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- Δεν έχει x,y-τομές
- $f$ ↘ στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$
- $f$ 1–1
- $f$ περιττή
- Συμμετρία ως προς την αρχή O
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: y-άξονας
- Οριζόντια Ασύμπτωτη: x-άξονας

## Συνάρτηση Ημίτονο

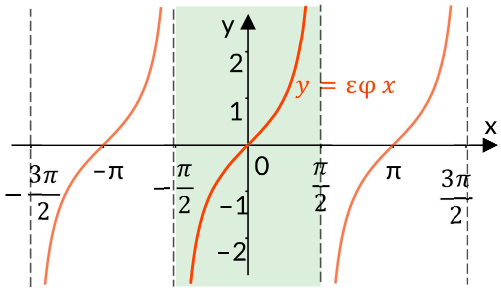
$f(x) = \text{ημ}\,x$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $[-1,1]$
- Περίοδος 2π
- y-τομή: $(0,0)$
- x-τομή: $(\kappa\pi, 0)$
- $f$ περιττή
- Συμμετρία ως προς την αρχή Ο

## Συνάρτηση Εφαπτομένη

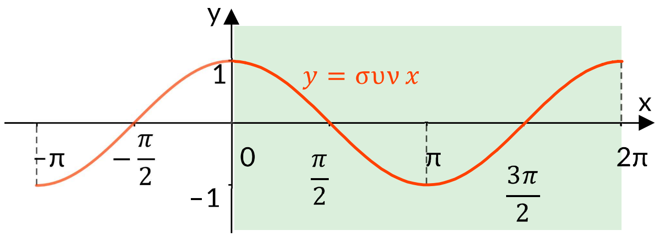
$f(x) = \text{εφ}\,x$




- Πεδίο Ορισμού: όλα τα $x \neq \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- Περίοδος π
- y-τομή: $(0,0)$
- x-τομή: $(\kappa\pi, 0)$
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: $x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$
- $f$ περιττή
- Συμμετρία ως προς την αρχή Ο

## Συνάρτηση Συνημίτονο

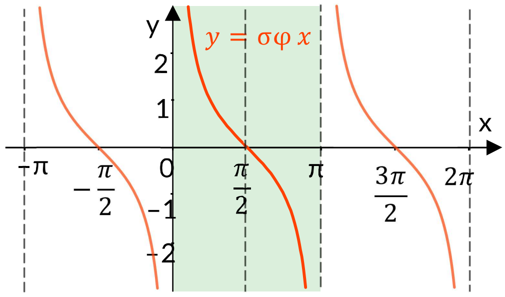
$f(x) = \text{συν}\,x$




- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $[-1,1]$
- Περίοδος 2π
- y-τομή: $(0, 1)$
- x-τομή: $\left(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0\right)$
- $f$ άρτια
- Συμμετρία ως προς y-άξονα

## Συνάρτηση Συνεφαπτομένη

$f(x) = \text{σφ}\,x$




- Πεδίο Ορισμού: όλα τα $x \neq \kappa\pi$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- Περίοδος π
- x-τομή: $\left(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0\right)$
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: $x = \kappa\pi$
- $f$ περιττή
- Συμμετρία ως προς την αρχή Ο

**ΟΡΙΣΜΟΣ** Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **περιοδική**, εάν υπάρχει ένας θετικός αριθμός Τ τέτοιος ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε τιμή του $x$.
Η μικρότερη από αυτές τις τιμές του $T$ είναι η **περίοδος** της $f$

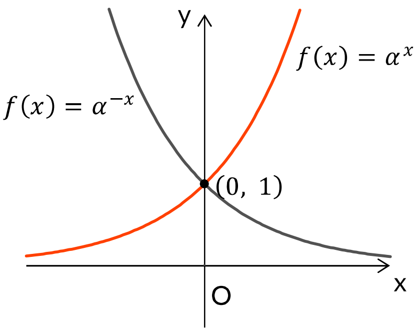
### Περίοδοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Περίοδος $\pi$:** | $\text{εφ}(x+\pi) = \text{εφ}\,x$<br>$\text{σφ}(x+\pi) = \text{σφ}\,x$ | **Άρτια**<br>$\text{συν}(-x) = \text{συν}\,x$ | **Περιττή**<br>$\text{ημ}(-x) = -\text{ημ}\,x$<br>$\text{εφ}(-x) = -\text{εφ}\,x$<br>$\text{σφ}(-x) = -\text{σφ}\,x$ |
| **Περίοδος $2\pi$:** | $\text{ημ}(x+2\pi) = \text{ημ}\,x$<br>$\text{συν}(x+2\pi) = \text{συν}\,x$ | | |

## Εκθετική Συνάρτηση

$f(x) = \alpha^x$ , $\alpha > 1$

πχ $f(x) = e^x$ για $\alpha = e$



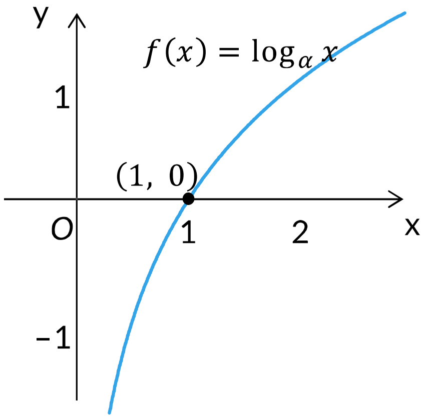

- Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $(0, +\infty)$
- $y'y$-τομή: $A(0,1)$
- $f \nearrow (-\infty, +\infty)$ για $f(x) = \alpha^x$
  είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
  δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
  αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$
- $f \searrow (-\infty, +\infty)$ για $f(x) = \alpha^{-x}$
  είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
  δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
  αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{-x_1} > \alpha^{-x_2}$
- $f$ 1–1
- Αντίστροφη η : $f^{-1}(x) = \log_\alpha x$
- Οριζόντια Ασύμπτωτη: $x'x$-άξονας
- Συνεχής

## Λογαριθμική Συνάρτηση

$f(x) = \log_\alpha x$ , $\alpha > 1$

πχ $f(x) = \ln x$ για $\alpha = e$

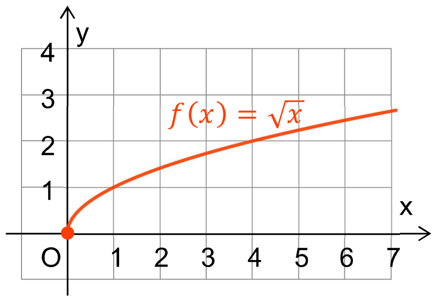
πχ $f(x) = \log x$ για $\alpha = 10$




- Πεδίο Ορισμού: $(0, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- x-τομή: $(1,0)$
- $f \nearrow (0, \infty)$
- $f$ 1–1
- Αντίστροφη η : $f^{-1}(x) = \alpha^x$
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: y-άξονας
- Συνεχής
- Συμμετρική της γραφικής παράστασης της $f(x) = \alpha^x$ ως προς την ευθεία $y = x$

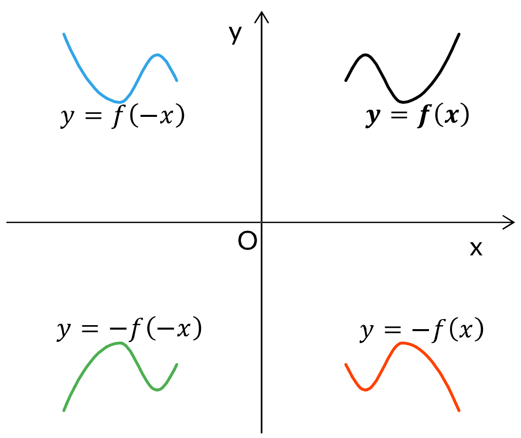
## Συνάρτηση Τετραγωνική Ρίζα

$f(x) = \sqrt{x}$




- Πεδίο Ορισμού: $[0, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών : $[0, +\infty)$
- $x, y$-τομή: $(0,0)$
- $f \nearrow [0, \infty)$
- $f$ 1–1

## Κατακόρυφες και Οριζόντιες ανακλάσεις της $y = f(x)$

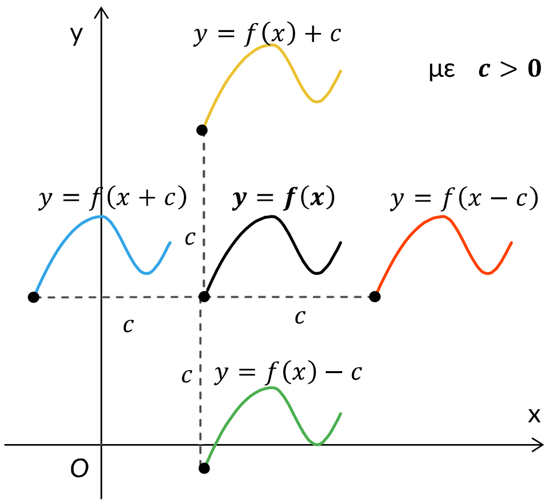



Για να αποκτήσετε το γράφημα της

- $y = -f(x)$ , ***ανακλάστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ως προς τον ***x-άξονα***
- $y = f(-x)$ , ***ανακλάστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ως προς τον ***y-άξονα***
- $y = -f(-x)$ , ***περιστρέψτε 180°*** το γράφημα της $y = f(x)$ ως γύρω απ' την ***αρχή Ο*** {ή ***ανακλάστε*** το γράφημα της $y = f(-x)$ ως προς τον ***x-άξονα***}

- ***Αλλάζει το είδος μονοτονίας*** για τις
  $y = f(-x)$ , $y = -f(x)$
- ***Αλλάζει το Πεδίο Ορισμού*** για τις
  $y = f(-x)$ , $y = -f(-x)$
- ***Διατηρείται το Σύνολο Τιμών*** για την $y = f(-x)$

## Κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της $y = f(x)$




Ας υποθέσουμε ότι $c > 0$.

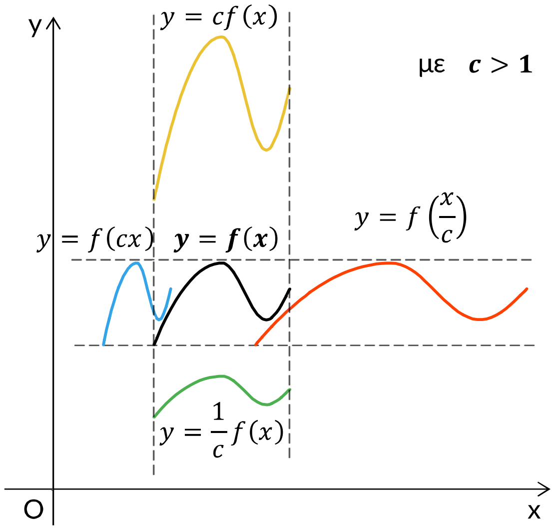
Για να αποκτήσετε το γράφημα της

- $y = f(x) + c$ , ***μετατοπίστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ μια απόσταση c μονάδων προς τα ***πάνω***
- $y = f(x) - c$ , ***μετατοπίστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ μια απόσταση c μονάδων προς τα ***κάτω***
- $y = f(x - c)$ , ***μετατοπίστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ μια απόσταση c μονάδων προς τα ***δεξιά***
- $y = f(x + c)$ , ***μετατοπίστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ μια απόσταση c μονάδων προς τα ***αριστερά***

- ***Διατηρείται το είδος μονοτονίας***
- ***Αλλάζει το Πεδίο Ορισμού*** για τις $y = f(x - c)$ , $y = f(x + c)$
- ***Διατηρείται το Σύνολο Τιμών*** για τις $y = f(x - c)$ , $y = f(x + c)$

## Κατακόρυφες και Οριζόντιες επιμηκύνσεις της $y = f(x)$

Ας υποθέσουμε ότι $c > 1$.




Για να αποκτήσετε το γράφημα της

- $y = c\,f(x)$, ***τεντώστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ***κατακόρυφα*** με συντελεστή c
- $y = \frac{1}{c} f(x)$ Συρρικνώστε το γράφημα της $y = f(x)$ ***κατακόρυφα*** με συντελεστή c
- $y = f(cx)$ , ***Συρρικνώστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ***οριζόντια*** με συντελεστή c
- $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ , ***τεντώστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ***οριζόντια*** με συντελεστή c
- $y = -f(x)$ , ***ανακλάστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ως προς τον ***x-άξονα***
- $y = f(-x)$ , ***ανακλάστε*** το γράφημα της $y = f(x)$ ως προς τον ***y-άξονα***
- ***Διατηρείται το είδος μονοτονίας***
- ***Αλλάζει το Πεδίο Ορισμού*** για τις $y = f(cx)$, $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$
- ***Διατηρείται το Σύνολο Τιμών*** για τις $y = f(cx)$, $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$

## Συναρτησιακές Σχέσεις $f(x + y) = \cdots$ και $f(x \cdot y) = \cdots$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

| Χαρακτηριστικές τιμές που **συνήθως** θέτουμε | | |
|---|---|---|
| | $f(x + y)$ | $f(x \cdot y)$ |
| Όπου $y$ το | $0$ | $1$ |
| Όπου $y$ το | $-x$ | $\frac{1}{x}$ |
| Όπου $x$ και $y$ το | $0$ | $1$ |
| Όπου $x$ και $y$ το | $\frac{x}{2}$ | $\sqrt{x}$ |